4. Szögfüggvények és komplex számok

a, Adjuk meg cos(3µ)-t cosµ-vel és sin(3µ)-t sinµ-val kifejezve!

Megoldás. Induljunk ki a következő összefüggésből: cos(3µ) + i sin(3µ) = (cosµ + i sinµ)3 Alakítsuk a jobb oldalt: (cosµ + i sinµ)3 = cos3µ + 3cos2µ isinµ + 3cosµ i2sin2µ + i3 sin3µ = = cos3µ + 3cos2µ isinµ - 3cosµ sin2µ - isin3µ

A két oldal valós részeinek egyenlőségéből cos(3µ) = cos3µ - 3cosµ sin2µ. A sin2µ = 1 - cos2µ azonosság miatt cos(3µ) = cos3µ - 3cosµ(1 - cos2µ) = 4 cos3µ - 3cosµ.

A két oldal képzetes részeinek egyenlőségéből, valamint a cos2µ = 1 - sin2µ azonosság alapján hasonlóan kapható, hogy sin(3µ) = 3cos2µ sinµ - sin3µ = 3 sinµ - 4 sin3µ:

b, A cos(5µ) + i sin(5µ) = (cos µ + i sin µ)5 összefüggés felhasználásával bizonyítsuk be, hogy cos(5µ) = 16 cos5µ - 20 cos3µ + 5cosµ !

Megoldás. A binomiális tétel alapján: (cos µ + i sin µ)5 = k k k i k           5 5 0 )sin(cos 5 

A két oldal valós részeinek egyenlőségéből cos(5µ) = cos5µ - 10 cos3µ sin2µ + 5 cosµ sin4µ Ezt a sin2µ = 1 - cos2µ és a sin4µ = (1 - cos2µ)2 azonosságok segítségével átalakítva kapjuk a végeredményt: cos(5µ) = 16 cos5µ - 20 cos3µ + 5cosµ

c, Adja meg a sin6x, sin7x és cos8x kifejezések értékét a cosx és sinx segítségével kifejezve! Megoldás. sin 6x = 6 cos5x sinx - 20 cos3x sin3x + 6 cosx sin5x sin 7x = 7 cos6x sinx - 35 cos4x sin3x + 21 cos2x sin5x – sin7x cos 8x = cos8x - 28 cos6x sin2x + 70 cos4x sin4x - 28 cos2x sin6x + sin8x